Έστω $f \in C([a,b])$ και $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, διακριτά μεταξύ τους.
Τότε το πολυώνυμο παρεμβολής $P_n \in \mathbb{P}_n$ της $f$ στα $x_i$, $i=0,1,\dots,n$ δίνεται σε μορφή Newton ως $P_n(x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0) + \dots +$
$+ \Delta^n(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$

Συμβολίζουμε με $P_n(x_0,x_1,\dots,x_n,x)$ το πολ. παρεμβολής της $f$ στα $x_i$, $i=0,1,\dots,n$.

Για $n=0$ έχουμε $P_n(x_0,x) = f(x_0) = \Delta^0(x_0)(f)$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει ο τύπος για $n-1$. Τότε το $P_n(x_0,x_1,\dots,x_n,x)$ γράφεται ως $P_n(x_0,x_1,\dots,x_n,x) = P_{n-1}(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x) + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$ διότι η διαφορά $P_i(x_0,x_1,\dots,x_i,x) - P_n(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x)$ έχει ως ρίζες τα $x_0,x_1,\dots,x_{n-1}$

Θα αποδείξουμε ότι

$$P_n(x_0,x_1,\dots,x_n,x) = \frac{(x-x_0)P_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_n,x) - (x-x_n)P_{n-1}(x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x)}{(x_n-x_0)}$$

Για $i=0$ ο τύπος δίνει

$$\frac{(x_0-x_0)P_{n-1}(x_1\dots x_n,x_0) - (x_0-x_n)P_{n-1}(x_0\dots x_{n-1},x_0)}{x_n-x_0} = f(x_0)$$

Για $i=1,2,\dots,n-1$ δίνει

$$\frac{(x_i-x_0)P_{n-1}(x_1\dots x_n,x_i) - (x_i-x_n)P_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1},x_i)}{x_n-x_0} =$$

$$= \frac{(x_i-x_0)f(x_i) - (x_i-x_n)f(x_i)}{(x_n-x_0)} = f(x_i)$$

Για $i=n$ δίνει

$$\frac{(x_n-x_0)P_{n-1}(x_1\dots x_n,x_n) - (x_n-x_n)P_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1},x_n)}{x_n-x_0} = f(x_n)$$

$\Rightarrow$ ισχύει ο τύπος

Ο συντελεστής μεγιστοβάθμιου όρου του $P_n(x_0,\dots,x_n,x)$ θα δίνεται από:

$$a_n = \frac{\text{σ.μ.ο του } P_{n-1}(x_1,\dots,x_n,x) - \text{σ.μ.ο } P_{n-1}(x_0,\dots,x_{n-1},x)}{x_n-x_0}$$

No. 2 Date

αλλά όμοια του $P_{n-1}(x_1, \ldots x_n, x) = \Delta^{n-1}(x_1, x_2, \ldots x_n)(f)$ και ο σ.μ.ο. του $P_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}, x) = \Delta^{n-1}(x_0, x_1, \ldots x_{n-1})(f)$, επομένως

$$a_n = \frac{\Delta^{n-1}(x_1, x_2, \ldots x_n)(f) - \Delta^{n-1}(x_0, x_1, \ldots x_{n-1})f}{x_n - x_0} = \Delta^n(x_0, x_1, \ldots x_n)(f)$$

| $x_i$ | $\Delta^0$ | $\Delta^{(1)}$ | $\Delta^{(2)}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $\Delta^1(x_0, x_1)(f)$ | | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | $\Delta^1(x_1, x_2)(f)$ | $\Delta^2(x_0, x_1, x_2)(f)$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | $\Delta^1(x_{n-1}, x_n)(f)$ | $\Delta^2(x_{n-1}, x_{n-1}, x_2)(f)$ | $\ldots \Delta^n(x_0, x_1, \ldots x_n)(f)$ |

| $x_i$ | $\Delta^0$ | $\Delta^1$ | $\Delta^2$ | $\Delta^3$ |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 2 | | | |
| 0 | 0 | -2 | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 2 | 8 | 8 | 4 | 1 |

$P_3(x) = 2 - 2(x+1) + 1(x+1)x(x-1) = x^3 + x^2 - 2x$

(ii) Έστω $i_0, i_1, \ldots, i_n$ μια μετάθεση των $0, 1, 2, \ldots, n$ τότε $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots x_n)(f) = \Delta^n(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})(f)$

Απόδειξη: Η διαιρεμένη διαφορά $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots x_n)(f)$ είναι ο συντελ. μεγ. όρου του πολ. παρεμβολής της $f$ στα $x_0, x_1, \ldots x_n$.
Η δ.δ. $\Delta^n(x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})(f)$ είναι ο σ.μ.ο. της παρεμβολής στα ίδια σημεία με διαφ. σειρά. Λόγω μοναδικότητας θα ταυτίζονται οι σ.μ.ο.

(iii) Αν $f \in P_{n-1}$ τότε $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)(f) = 0$

Η δ.δ. $\Delta^n(x_0, x_1, \ldots x_n)$ είναι ο συντελεστής το $x^n$. Επειδή $f \in P_{n-1}$ η $f$ θα ταυτίζεται με το πολ. παρεμβολής $P_n = f \in P_{n-1}$ με συντελ. του $x^n$ να είναι 0.

(iii) Έστω $f \in C^n[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (a', b')$ όπου $a' = \min\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ και $b' = \max\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, τέτοιο ώστε

$$\Delta^n(x_0, x_1, \dots x_n)(f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Έστω $P_{n-1}$ το πολ. παρεμβολής της $f$ στα $x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}$, τότε από τον τύπο του σφάλματος έχουμε $f(x) - P_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$

Από τον τύπο παρεμβ. Newton έχουμε:

$P_n(x_0, x_1, \dots x_n, x) = P_{n-1}(x) + \Delta^n(x_0, x_1, \dots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

Τότε $f(x_n) = P_{n-1}(x_n) + \Delta^n(x_0, x_1, \dots x_n)(x_n - x_0)\dots(x_n - x_{n-1})$

για οποιοδήποτε $x_n$ στο $[a,b]$ διαφ. από τα $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$

Θέτοντας $x$ στη θέση του $x_n$ έχουμε:

$f(x) = P_{n-1}(x) + \Delta^n(x_0, x_1, \dots x_{n-1}, x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$

Επομένως, $\Delta^n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \frac{f^{n}(\xi)}{n!}$

Θέτω ξανά $x_n$ στη θέση του $x$ και παίρνουμε το ζητούμενο

$$\Delta'(x_0, x_0)(f) = \lim_{x \to x_0} \Delta'(x, x_0) = f'(x_0)$$

$$f^n \underbrace{(x_0, x_0, \dots x_0)}_{n+1} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$P_n(x) = f(x_0) + \Delta'(x_0, x_0)(f) + \Delta^2(x_0, x_0, x_0)(f) + \dots + \Delta^n(x_0, x_0, \dots x_0)(f) =$

$f(x_0) + f'(x_0) + \frac{f'(x_0)}{n!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$(x_1, x_0, x_2, x_3) = (0, -1, 1, 2)$

$P_3(x) = 0 - 2x + 1 \times (x+1) + 1 \times (x+1)(x-1) = x^3 + x^2 - 2x$

$(1, 0, -1, 2)$

$P_3(x) = 0 + 0(x-1) + 1(x-1)x + 1(x-1)x(x+1) = x^3 + x^2 - 2x$

$P_3(x) = 8 + 8(x-2) + 4(x-2)(x-1) + 1(x-2)(x-1)x = x^3 + x^2 - 2x$